КІРОВОГРАДСЬКА МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ

ПІДСУМОВУВАННЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

Роботу виконав:
Мандебура Ілля Олександрович,
учень 9 класу навчально-виховного комплексу «Загальноосвітній навчальний заклад І-ІІІ ступенів №19- дошкільний навчальний заклад «Лісова казка» Олександрійської міської ради»

Науковий керівник:
Макарчук Олег Петрович
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики, статистики та економіки Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені В.Винниченка
Мірошниченко Тетяна Леонідівна,
вчитель математики комунального закладу «Центральноукраїнський науковий ліцей-інтернат Кіровоградської обласної ради»

Узагальнений ряд Суайнсхеда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n} (k \in N).$$

Позначимо при $|a| > 1$

$$S(a;k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k}{a^n}.$$

Підходи при знаходженні $S(a;k)$ при достатньо не великих натуральних k :

1) дискретний аналог формули Ньютона-Лейбніца для нескінченних сум в термінах антирізниць;
2) використання генератрис;
3) віднімання степеневих рядів.

Теорема *. Для фіксованого* k *функція* $f(a) = S(a;k)$ *має наступні властивості:*

а) $S(a;k)$ *спадає на інтервалі* $(1;+\infty)$*;*

б) $S(a;k)$ *є неперервною на інтервалі* $(1;+\infty)$*;*

в) $S(a;k)$ *при* $a \in (1;+\infty)$ *набуває значень* $(0;+\infty)$.

Наслідок *. Для кожного числа* $b \in (0;+\infty)$ *існує єдине число* $\xi \in (1;+\infty)$ *таке, що* $S(\xi;k) = b$.

Зауваження. *Функція* $S(a;k)$ *є рівномірно неперервною на проміжку* $[c;+\infty)$ *для довільного* $c \in (1;+\infty)$*.Однак,* $S(a;k)$ *не є рівномірно неперервною функцією на інтервалі* $(1;+\infty)$

Теорема. *Виконається рівність* $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^k}{a^n}=\sum_{r=0}^{k}\frac{S^*(k;r)\cdot a\cdot r!}{(a-1)^{r+1}}$$

Доведення.

Для початку обрахуємо величину

$$V(a,k,l)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-(l-1))}{a^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n)_l}{a^n},$$

де $(n)_l=\prod_{j=0}^{l-1}(n-j)$ – спадний факторіал порядку l. Розглянемо рівність

$$\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\dots+\frac{x^n}{a^n}+\dots=\frac{x}{a}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{a}}\right)=\frac{x}{a-x}=-1-\frac{a}{x-a}$$

та продиференціюємо її l разів, отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n)_l x^{n-l}}{a^n}=-a\left((x-a)^{-1}\right)^{(l)}=-a(-1)^l(x-a)^{-(l+1)}l!$$

Оскільки виконується рівність :

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} S^*(n;j) \cdot \left(x_j\right),$$

де $S^*(n;j)$ – числа Стірлінга 2-го роду, то маємо:

$$n^k = \sum_{j=0}^{k} S^*(k;j) \cdot (n_j)\,,$$

звідки

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k}{a^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{S^*(k;0)(n)_0 + S^*(k;1)(n)_1 + \cdots + S^*(k;k)(n)_k}{a^n} = \sum_{r=0}^{k} \frac{S^*(k;r) \cdot a \cdot r!}{(a-1)^{r+1}}$$

Дослідження алгебраїчної структури множини значень $S(a;k)$

Теорема . *Виконуються твердження:*

1) *якщо* $k \in N$ *та* $a \in Q \cap (1;+\infty)$, *то* $S(a;k) \in Q$;
2) *множина* $S(Q;k) \equiv \{S(a;k)|a \in Q\}$ *є всюди щільною на* $(0;+\infty)$ *підмножиною раціональних чисел;*
3) *прообраз* $\{S^{-1}(x;k)|x \in Q \cap (0;+\infty)\} \equiv \{z|S(z;k) \in Q \cap (0;+\infty)\}$ *містить нескінченну кількість ірраціональних чисел;*
4) *множина тих ірраціональних чисел* a^* *для яких* $S(a^*;k) \in Q$ *є всюди щільною;*
5) *якщо* a *є ірраціональним алгебраїчним числом порядку* $h > k+1$, *то* $S(a;k)$ *є ірраціональним числом;*
6) *якщо число* a *є трансцендентним, то* $S(a;k)$ *також є трансцендентним.*

Дослідження асимптотики росту значень сум узагальненого ряду Суайнсхеда.

Теорема . *Виконується еквівалентність*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^k}{e^k}=S(e;k)\sim k!\,(k\sim+\infty).$$

Доведення.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^k}{e^k}=S_1+S_2\,,\qquad S_1=\sum_{n=1}^{k}\frac{n^k}{e^k},\qquad S_2=\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{n^k}{e^k}.$$

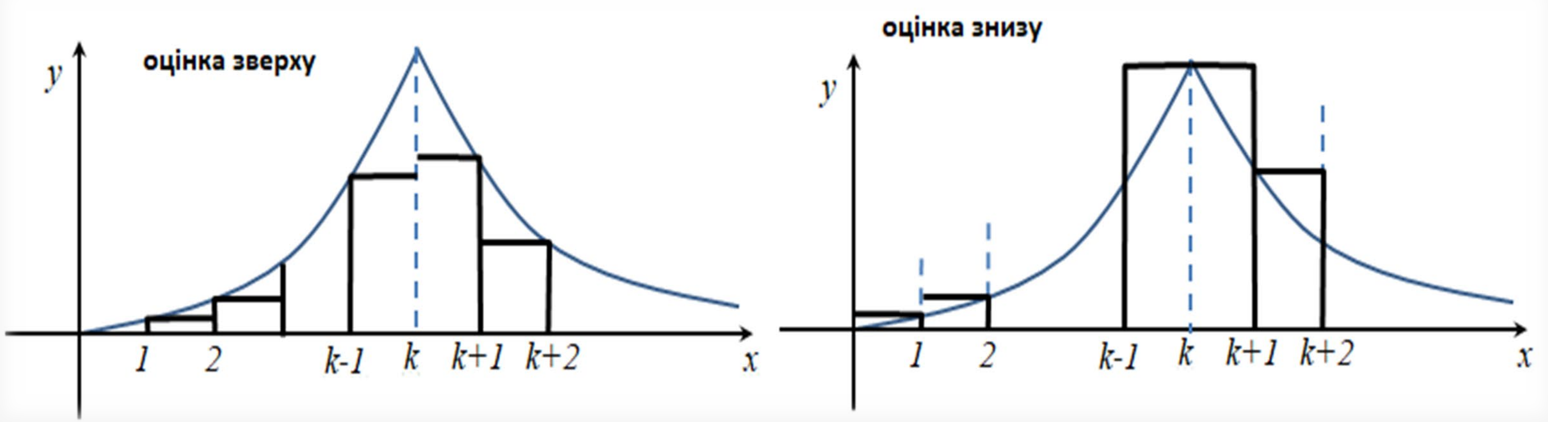

Рис . Побудова оцінок для $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$.

$$h(k) - f(k) < S(e;k) < h(k) + f(k)$$

$$h(k) = \int_0^{+\infty} \frac{x^k}{e^x} dx = k!$$

Використовуючи формулу Стірлінга для факторіала маємо:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{f(k)}{h(k)} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \cdot \left(\frac{e}{k}\right)^k = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} = 0.$$

Отже,

$$1 = \lim_{k\to+\infty} \frac{h(k) - f(k)}{h(k)} \le \lim_{k\to+\infty} \frac{S(e;k)}{k!} \le \lim_{k\to+\infty} \frac{h(k) + f(k)}{h(k)} = 1.$$

Узагальнений ряд Флінта Хіллза:

$$F(u;v)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^u\sin^v(n)}.$$

Випадок: $(u;v)\equiv(0;-1)$.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin(k).$$

Знаходження S_n **на основі антирізниці.**

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(k)=\Delta^{-1}\sin x\Big|_1^{n+1}=\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{-2\sin\frac{1}{2}}-\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\right)}{-2\sin\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)+\cos\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}=0{,}5\operatorname{ctg}(0{,}5)-\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}.$$

***Теорема** 7. Ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} sin(n)$$

є розбіжним, причому для послідовності часткових сум S_n *виконуються умови:*

а) $S_n \in \left(-0{,}5tg(0{,}25); 0{,}5ctg(0{,}25)\right) = B$ *для кожного* $n \in N$;

б) для кожного $\gamma \in [-0{,}5tg(0{,}25); 0{,}5ctg(0{,}25)]$ *і* $\varepsilon > 0$ *існує номер* N_0 *такий, що* $\left|S_{N_0} - \gamma\right| < \varepsilon$;

в) S_n *розподілена на своїй множині значень за функцією*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\arccos\left(\cos\frac{1}{2} - 2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\cdot x\right) - \frac{1}{2}.$$

Теорема. *Ряд Флінта Хіллза з параметрами* $(0;1)$ *та* $(1;1)$ *є розбіжним і з параметрами* $(\tau;1)$, *де* $\tau > 7{,}6064$ *є збіжним.*

Випадок $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) \equiv (\mathbf{0};\mathbf{1})$. Зрозуміло, що $|\sin(n)| \leq 1$, тому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sin(n)} \neq 0$$

Випадок $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) \equiv (\mathbf{1};\mathbf{1})$.

$$\left|\pi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{{q_n}^2} \Rightarrow |q_n\pi - p_n| < \frac{1}{q_n} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{p_n \sin(p_n)}\right| > \frac{1}{\pi + 0{,}01},$$

Випадок $(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}) \equiv (\boldsymbol{\tau};\mathbf{1})$, де $\tau > 7{,}6064$.

В. Салікхов. Починаючи з деякого $N_0 \in N$ для кожних натуральних чисел $a, b > N$ маємо:

$$\left|\pi - \frac{a}{b}\right| > \frac{1}{b^{7{,}6064}}.$$