ЙМОВІРНІСНИЙ АНАЛІЗ БІНАРНОЇ ГРИ З ОДНОРІДНОЮ СИСТЕМОЮ

Роботу виконала:
Шестаковська Яна Вікторівна,
учениця 10 класу комунального закладу «Центральноукраїнський науковий ліцей-інтернат Кіровоградської міської ради»

Науковий керівник:
Макарчук Олег Петрович, доцент кафедри прикладної математики, статистики та економіки Центральноукраїнського державного педагогічного університету
імені Володимира Винниченка, кандидат фізико-математичних наук

Завдання 1. *Гравець грає в рулетку в казино і постійно ставить на біле. Виконати наступні завдання:*

1) обрахувати приблизно виграш казино, якщо гравець здійснює 10000 спроб, в кожній з яких він ставить по 1 фішці;

2) обрахувати ефективний діапазон виграшу казино з ймовірністю 95%, якщо гравець здійснює 10 000 спроб, в кожній з яких він ставить по 1 фішці;

3) здійснити уточнення оцінок в пункті 2 на основі нерівності Беррі - Ессеєна.

Розв'язання

Зрозуміло, що в рулетці 18 білих та 18 чорних секторів, та один сектор «Зеро». Таким чином, ймовірність виграшу гравця дорівнює:

$$P_1 = \frac{18}{37}.$$

Казино виграє з ймовірністю:

$$P_2 = \frac{19}{37}.$$

Введемо випадкову величину ξ, яка набуває значень -1 та 1 з ймовірностями $\frac{18}{37}$ та $\frac{19}{37}$ відповідно.

Отже, випадкова величина ξ має розподіл.

ξ	-1	1
	$\frac{18}{37}$	$\frac{19}{37}$

Зрозуміло, що значення випадкової величини

$$\xi_1 + \cdots + \xi_{10000}$$

представляє собою значення виграшу казино при 10000 ставках.

Зрозуміло, що

$$M_\xi = -1 \cdot \frac{18}{37} + 1 \cdot \frac{19}{37} = \frac{1}{37}.$$

Для дисперсії маємо:

$$M_{\xi^2} = (-1)^2 \cdot \frac{18}{37} + 1^2 \cdot \frac{19}{37} = 1.$$

звідки відповідно

$$D_\xi = M_{\xi^2} - M_\xi^2 = 1 - (\frac{1}{37})^2 \approx 0{,}9992.$$

Використовуючи посилений закон великих чисел Колмогорова, маємо:

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \to M_\xi (\text{м. с})$$

звідки

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_{10000}}{10000} \approx 0{,}027$$

$$\xi_1 + \cdots + \xi_{10000} \approx 0{,}027 \cdot 10000 = 270.$$

Отже, за центральною граничною теоремою маємо:

$$P\left(\frac{\psi_1 + \cdots + \psi_n}{\sqrt{n}} < x\right) \to F_\eta(x).$$

де $\eta \in N_{(0;1)}$ – стандартний нормальний (гауссівський) розподіл, який має щільність:

$$p_\eta(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

і відповідну функцію розподілу

$$F_\eta(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

$$P\left(\xi_1 + \cdots + \xi_n \in [a\sigma_{\xi_1}\sqrt{n} + nM_{\xi_1}; b\sigma_{\xi_1}\sqrt{n} + nM_{\xi_1}]\right) \approx F_\eta(b) - F_\eta(a).$$

Ефективний діапазон логічно шукати симетрично відносно M_ξ. Таким чином покладемо

$$a = -b.$$

Ефективний діапазон логічно шукати симетрично відносно M_ξ. Таким чином покладемо

$$a = -b.$$

Отже, будемо шукати ефективний інтервал у вигляді:

$$\left[-b\sigma_{\xi_1}\sqrt{n} + nM_{\xi_1}; b\sigma_{\xi_1}\sqrt{n} + nM_{\xi_1}\right].$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

В даному випадку

$$G(b) - G(-b) = 0.95;$$

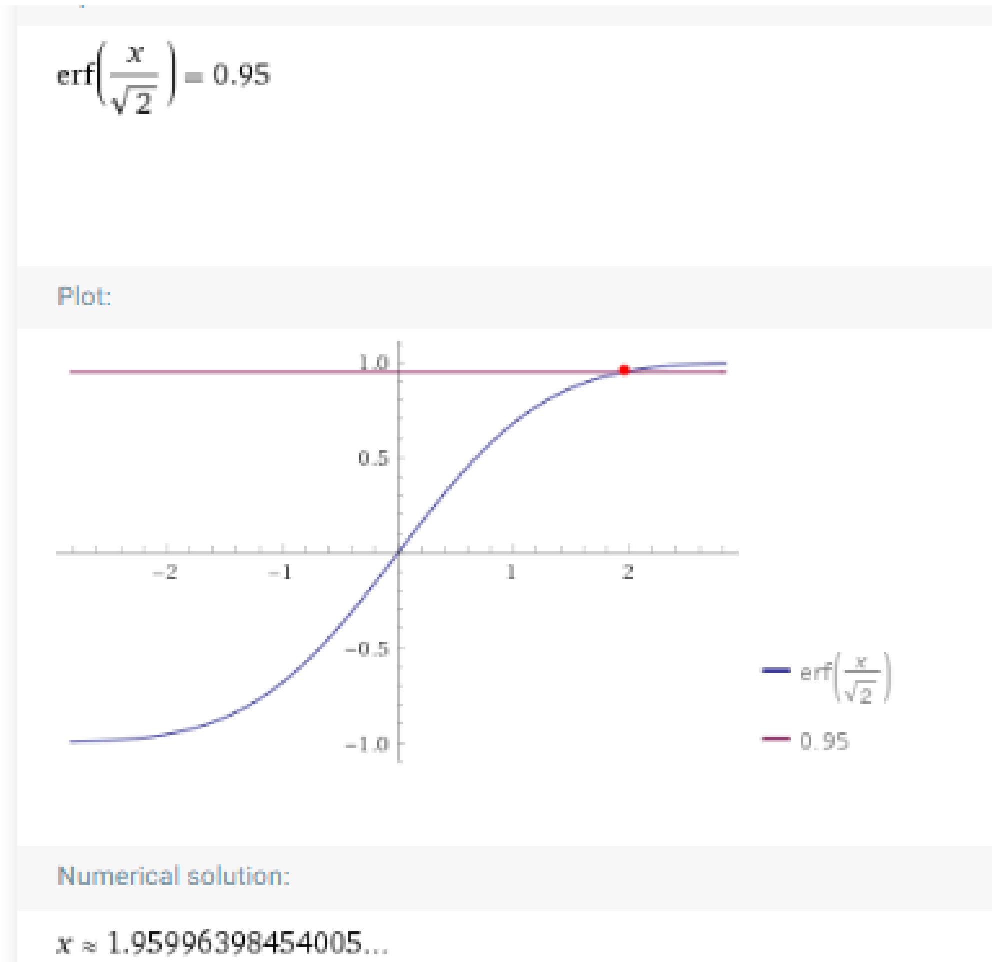
$$0.5\operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) - 0.5\operatorname{erf}\left(\frac{-b}{\sqrt{2}}\right) = 0.95;$$

$$2 * 0.5\operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) = 0.95;$$

$$\mathrm{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) = 0.95;$$

Використовуючи сервіс можливо знайти шукане значення:

$$b = 1.9599.$$



Отже, маємо наступний ефективний діапазон:

$$\begin{bmatrix} -1.96 \cdot 0.99 \cdot \sqrt{10000} + 10000 \cdot 0.027; \\ +1.96 \cdot 0.99 \cdot \sqrt{10000} + 10000 \cdot 0.027 \end{bmatrix};$$

Використовуючи сервіс обраховуємо десяткові значення кінців ефективного діапазона:

$$[75.96; 464.04].$$

Обрахунки в сервіс представлені на рисунку 6.

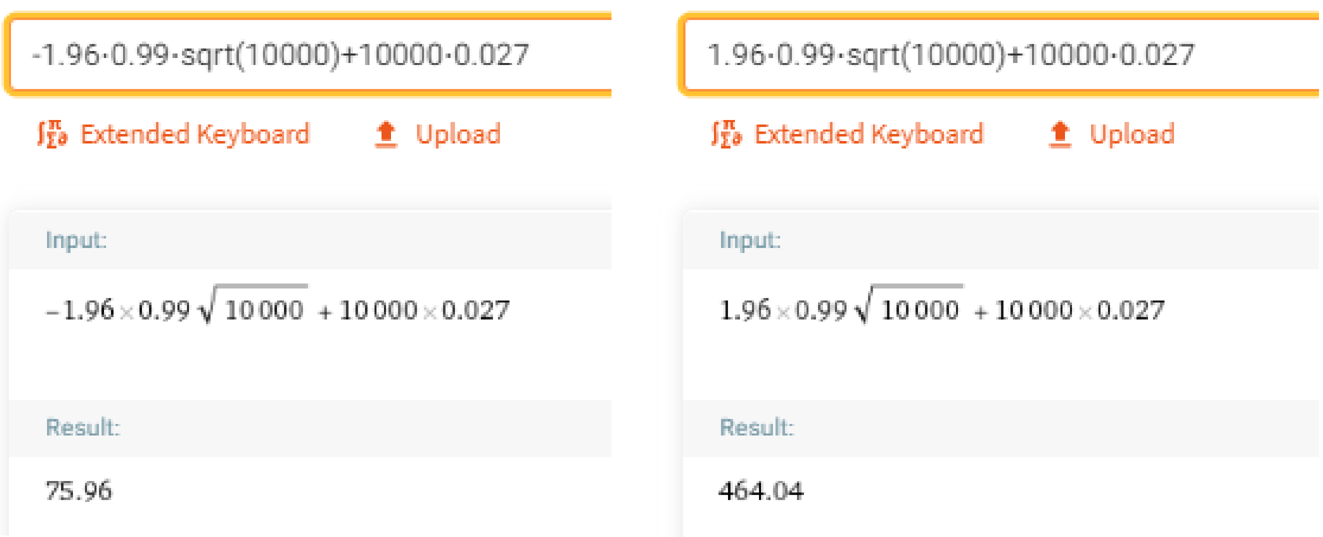


Рис 6. Обрахунок ефективного діапазону в сервісі

Нагадаємо, що за відповідною нерівністю:

$$\left|P\left(\frac{S_n - nM_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_1}\sqrt{n}} < x\right) - F_\eta(x)\right| \le 0.4784\frac{M|\xi_1 - M_{\xi_1}|^3}{\sigma_{\xi_1}^3\sqrt{n}}$$

Зрозуміло, що

$$M|\xi_1 - M_{\xi_1}|^3 = \frac{18}{37}\cdot\left|-1-\frac{1}{37}\right|^3 + \frac{19}{37}\cdot\left|1-\frac{1}{37}\right|^3 \approx 1.$$

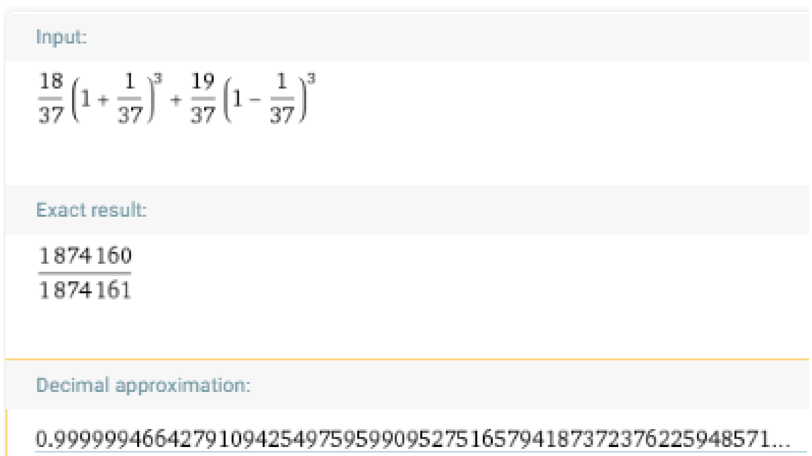


Рис 7. Обрахунок $M|\xi_1 - M_{\xi_1}|^3$.

Маємо:

$$0.4784\frac{M|\xi_1 - M_{\xi_1}|^3}{\sigma_{\xi_1}^3\sqrt{n}} = 0.4784\cdot\frac{1}{1\cdot 100} \approx 0.0048.$$

$$P\left(\frac{S_n - nM_{\xi_1}}{\sigma_{\xi_1}\sqrt{n}} < x\right) = F_\eta(x) + \Delta_1;$$

$$P\left(\xi_1 + \cdots + \xi_n < x\sigma_{\xi_1}\sqrt{n} + nM_{\xi_1}\right) = F_\eta(x) + \Delta_1,$$

де у нашому випадку

$$\Delta_1 \in [-0.0048; 0.0048],$$

іншими словами

$$|\Delta_1| \leq 0.0048.$$

$$P\left(\xi_1 + \cdots + \xi_n \in [-t\sigma_{\xi_1}\sqrt{n} + nM_{\xi_1}; t\sigma_{\xi_1}\sqrt{n} + nM_{\xi_1}]\right) =$$

$$= F_\eta(t) + \Delta_1 - \left(F_\eta(-t) + \Delta_2\right) =$$

$$= F_\eta(t) - F_\eta(-t) + \Delta_1 - \Delta_2 =$$

$$= erf\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \Delta.$$

$$erf\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = 0.95 - \Delta.$$

Зрозуміло, що для величини $0.95 - \Delta$ виконуються умови:

$$0.95 - 0.0096 \leq 0.95 - \Delta \leq 0.95 + 0.0096$$

або іншими словами

$$0.9404 \leq 0.95 - \Delta \leq 0.9596$$

Отже, маємо наступний ***уточнений ефективний діапазон*** при $\Delta = -0.0096$:

$$\begin{bmatrix} -2.0496 \cdot 0.99 \cdot \sqrt{10000} + 10000 \cdot 0.027; \\ +2.0496 \cdot 0.99 \cdot \sqrt{10000} + 10000 \cdot 0.027 \end{bmatrix}.$$

Використовуючи сервіс обраховуємо десяткові значення кінців ефективного діапазона:

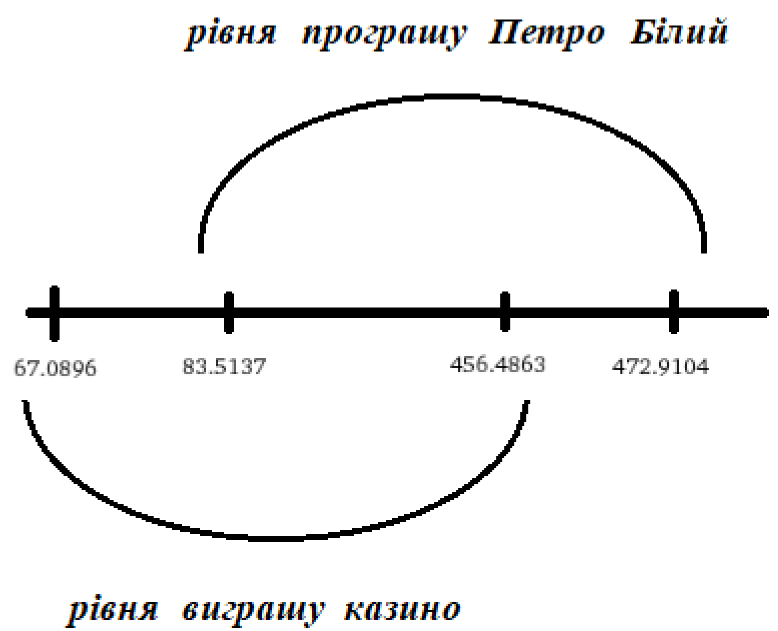
$$[67.0896; 472.9104].$$

Отже, маємо наступний ***уточнений ефективний діапазон*** при $\Delta = +0.0096$:

$$\begin{bmatrix} -1.8837 \cdot 0.99 \cdot \sqrt{10000} + 10000 \cdot 0.027; \\ +1.8837 \cdot 0.99 \cdot \sqrt{10000} + 10000 \cdot 0.027 \end{bmatrix}.$$

Використовуючи сервіс обраховуємо десяткові значення кінців ефективного діапазона:

$$[83.5137; 456.4863].$$



ВИСНОВКИ

Робота присвячена проблемі аналізу ігрових ситуацій ймовірнісного типу з дискретним розподілом виграшів. Особливу роль в роботі присвячено проблемі уточнення ефективного діапазону виграшу по відношенню до кожної сторони, що діє в грі.

В процесі реалізації мети дослідження виконано такі завдання:

1) визначено значення виграшу для ймовірнісної гри з бінарним розподілом виграшів на основі ЗВЧ;

2) визначено ефективний діапазон виграшів для ймовірнісної гри з бінарним розподілом виграшів на основі ЦГТ;

3) поглиблено ефективні діапазони виграшів для ймовірнісної гри з бінарним розподілом виграшів на основі нерівності Беррі-Ессеєна.

В процесі виконання роботи були отримано наступні ***результати:***

Якщо гравець в казино здійснює 10000 ставок на біле, то

1) На основі ЗВЧ казино виграє приблизно

$$\xi_1 + \cdots + \xi_{10000} \approx 0{,}027 \cdot 10000 = 270 \text{ (ф)}.$$

2) На основі ЦГТ значення виграшу казино з ймовірністю 95% попадає в діапазон:

$$[75.96; 464.04].$$

3) При використанні нерівності Беррі-Ессеєна, для поглиблення ефективних діапазонів маємо:

Для прогнозування ***рівня виграшу казино*** доцільно використовувати ефективний діапазон:

$$[67.0896; 456.4863].$$

Для прогнозування ***рівня програшу гравця*** доцільно використовувати ефективний діапазон:

$$[83.5137; 472.9104].$$