ПРОБЛЕМА МИХАЙЛА ЯДРЕНКА З ТЕОРІЇ ПОБУДОВ ЦИРКУЛЕМ ТА ЛІНІЙКОЮ

Роботу виконав:
БОНДАР АНДРІЙ РУСЛАНОВИЧ,
учень 10 класу
комунального закладу
«Центральноукраїнський науковий ліцей-інтернат
Кіровоградської обласної ради».

НАУКОВІ КЕРІВНИКИ:
МАКАРЧУК ОЛЕГ ПЕТРОВИЧ,
доцент кафедри математики та методики її навчання
Центральноукраїнського державного університету
імені Володимира Винниченка, кандидат фізико-математичних наук;

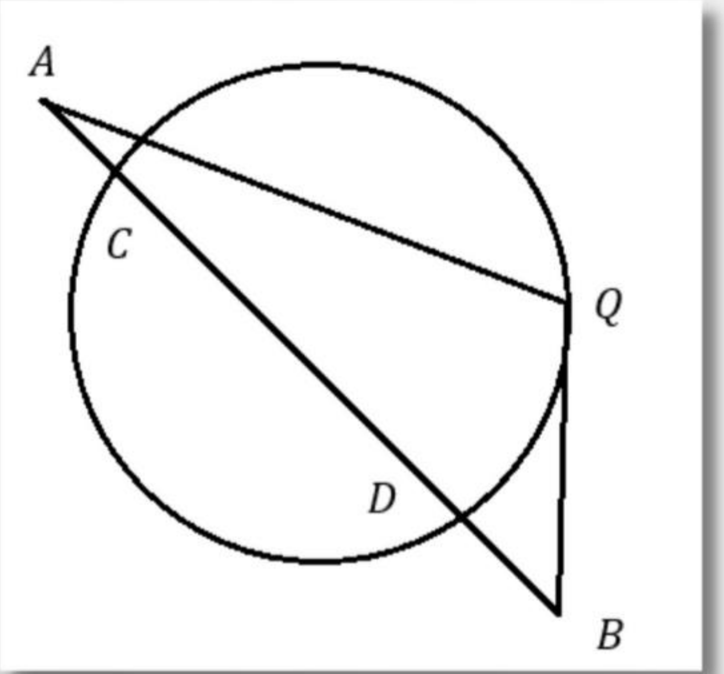
СВИРИДЕНКО ОЛЕНА ЛЕОНІДІВНА,
вчитель математики комунального закладу
«Центральноукраїнський науковий ліцей-інтернат Кіровоградської обласної ради».

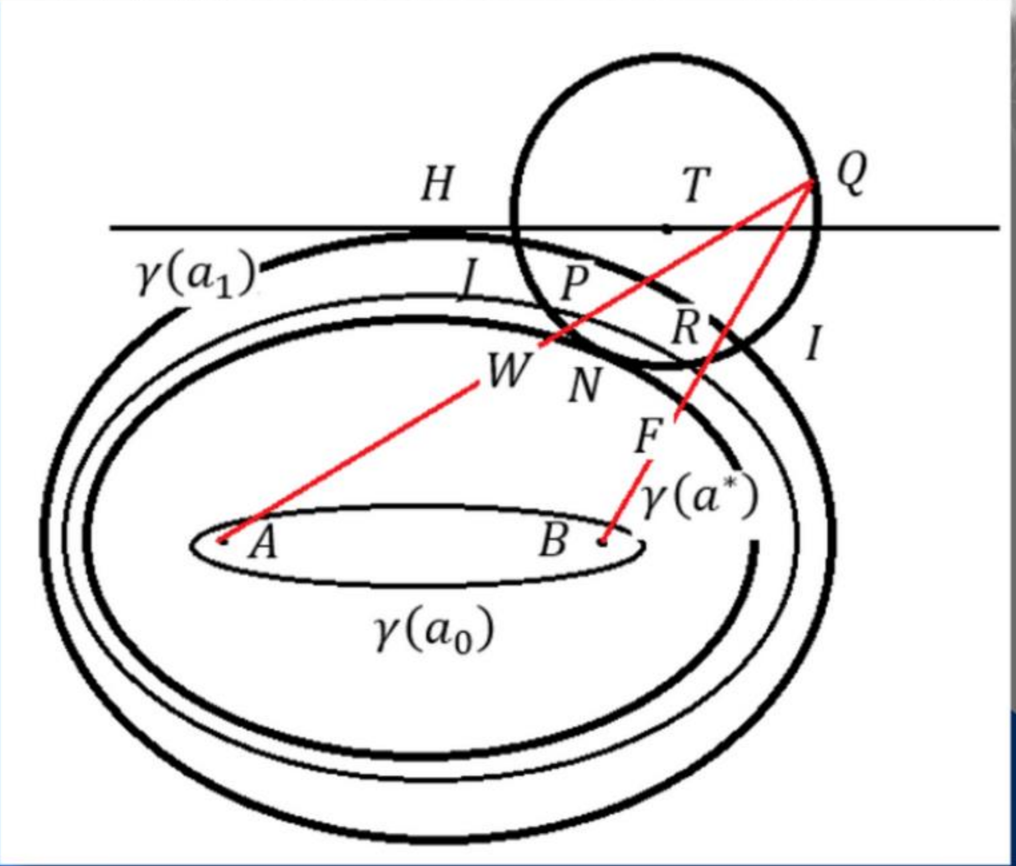
ПРОБЛЕМА ЯДРЕНКА

МИХАЙЛО ЯДРЕНКО

На площині відмічено точки A та B і коло ω.

Чи можливо за допомогою циркуля та лінійки побудувати точку $Q \in \omega$ так, що периметр ΔAQB набуває найменшого значення $P\_AQB \to min \Longleftrightarrow AQ+BQ \to min$.





ЛЕМА 2.

Якщо відрізок АВ перетинає коло ω в точках С та D, шуканими розв'язками проблеми Ядренка є точки С та D відповідно.

ЛЕМА 4.

Якщо відрізок АВ не перетинає коло ω та точки А,В лежать зовні кола, то проблема Ядренка має єдиний розв'язок.

ТЕОРЕМА 1. *Проблема Ядренка в загальному випадку не може бути розв'язана з допомогою циркуля та лінійки.*

ДОВЕДЕННЯ.

Введемо прямокутну систему координат так, що $A(-1;0), B(1;0), T(1;3)$ та радіус кола рівний 1.

Нехай $Q(\cos(t)+1; \sin(t)+3) \in \omega$ де $t \in [0;2\pi]$.

Знайдемо мінімальне значення функції

$$f(t) = AQ + BQ =$$

$$= \sqrt{(cos(t)+2)^2 + (sin(t)+3)^2} + \sqrt{(cos(t))^2 + (sin(t)+3)^2}$$

для цього прирівняємо похідну останньої до нуля. Маємо:

$$f(t) = \sqrt{4\cos(t) + 6\sin(t) + 14} + \sqrt{6\sin(t) + 10}$$

$$f'(t) = \frac{-4\sin(t) + 6\cos(t)}{2\sqrt{4\cos(t) + 6\sin(t) + 14}} + \frac{6\cos(t)}{2\sqrt{6\sin(t) + 10}}$$

Отже,

$$\frac{-4\sin(t)+6\cos(t)}{2\sqrt{4\cos(t)+6\sin(t)+14}}+\frac{6\cos(t)}{2\sqrt{6\sin(t)+10}}=0 \Rightarrow$$

$$(-2\sin(t)+3\cos(t))^2(3\sin(t)+5)=9cos^2(t)(2\cos(t)+3\sin(t)+7)^2$$

Використовуючи універсальну підстановку

$$\sin(t)=\frac{2tg(\frac{t}{2})}{1+tg(\frac{t}{2})^2}$$

$$cos(t)=\frac{1-tg(\frac{t}{2})^2}{1+tg(\frac{t}{2})^2}$$

та позначивши $tg\left(\frac{t}{2}\right)=x$ маємо:

$$(-2\sin(t)+3\cos(t))^2(3\sin(t)+5)=9cos^2(t)(2\cos(t)+3\sin(t)+7)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(-2\cdot 2x+3(1-x^2)\right)^2\left(3\cdot 2x+5(1+x^2)\right)=$$

$$=9(1-x^2)^2(2(1-x^2)+3\cdot 2x+7(1+x^2)) \Leftrightarrow$$

$$g(x)=45x^6+174x^5+224x^4+42x^3-73x^2-120x-36=0$$

Нехай виконується рівність:

$$g(x) = h(x)r(x)$$

РОЗГЛЯНЕМО ВИПАДКИ.

1) Нехай виконуються рівності:

$$h(x) = ax + b;\ a, b \in Z,$$

$$r(x) = cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h; c, d, e, f, g, h \in Z.$$

У цьому випадку $g(x)$ має раціональний нуль. Дільники старшого коефіцієнту та вільного члена відповідно

$$135: 1,3,5,9,15,27,45,135;\ \ 342: 1, 2, 3, 6,9,18,19,38,57,104,171,342.$$

Раціональний корінь цього рівняння має вигляд $\pm\frac{p}{q}$ де p — натуральний дільник 342, q — натуральний дільник числа 135.

2) Нехай виконуються рівності:

$$h(x) = ax^2 + bx + c;\ a, b, c \in Z,$$

$$r(x) = dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h; d, e, f, g, h \in Z.$$

Обрахуємо кілька значень в цілих точках многочлена та спробуємо вибрати ті значення, які мають якомога найменшу кількість дільників. Маємо: $g(0) = -342, g(1) = 112, g(2) = 27462, g(-1) = 48, g(-2) = 3910.$ Також представимо розклади на прості дільники відповідних результатів: $48 = 2^4 \cdot 3; 112 = 2^4 \cdot 7; 27462 = 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 119; 342 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19; 3910 = 2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 23.$

Суть методу Кронекера достатньо простий: якщо $l \in Z$ то $g(l) \vdots h(l)$ і відповідно $h(l)$ є дільником $g(l)$.

Таким чином маємо:

$$\begin{cases} h(0) = c = \alpha \\ h(1) = a + b + c = \beta \\ h(-1) = a - b + c = \gamma \end{cases}$$

В подальшому ми вкажемо всі можливі значення трійок $(\alpha;\beta;\gamma)$. Розв'яжемо останню систему відносно α,β,γ.

Легко отримати, що

$$\begin{cases} a = \dfrac{\beta+\gamma}{2} - \alpha \\ b = \dfrac{\beta-\gamma}{2} - \alpha \\ c = \alpha \end{cases}$$

Зрозуміло, що

$$\alpha \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18, \pm19, \pm38, \pm57, \pm104, \pm171, \pm342\}$$

$$\beta \in \{\pm1, \pm2, \pm4, \pm7, \pm8, \pm14, \pm18, \pm28, \pm56, \pm112\}$$

$$\gamma \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm16, \pm24, \pm48\}$$

3) Нехай виконуються рівності:

$$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ a, b, c, d \in Z,$$

$$r(x) = ex^3 + fx^2 + gx + h; d, e, f, g, h \in Z.$$

Таким чином маємо:

$$\begin{cases} h(0) = d = \alpha \\ h(1) = a + b + c + d = \beta \\ h(-1) = -a + b - c + d = \gamma \\ h(-2) = -8a + 4b - 2c + d = \delta \end{cases}$$

Розв'яжемо останню систему відносно $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Легко отримати, що

$$\begin{cases} a = \dfrac{-3\alpha + \beta + 3\gamma - \delta}{6} \\ b = \dfrac{-2\alpha + \beta + \gamma}{2} \\ c = \dfrac{3\alpha + 2\beta - 6\gamma + \delta}{6} \\ d = \alpha \end{cases}$$

Зрозуміло, що

$$\alpha \in \{\pm1, \pm 2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18, \pm19, \pm38, \pm57, \pm104, \pm171, \pm342\}$$

$$\beta \in \{\pm1, \pm2, \pm4, \pm7, \pm8, \pm14, \pm18, \pm28, \pm56, \pm112\}$$

$$\gamma \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm16, \pm24, \pm48\}$$

$$|\delta| \in \{1, 2, 5, 10, 17, 23, 34, 46, 85, 115, 170, 230, 391, 782, 1\,955, 3\,910\}$$

Таким чином многочлен не звідний в полі раціональних чисел. Як відомо [4, с.61], якщо нуль незвідного в полі раціональних чисел многочлена з цілими коефіцієнтами можливо побудувати з допомогою циркуля та лінійки, то відповідний многочлен повинен мати степінь, який є степенем двійки. У нашому випадку степінь рівний 6.

Отже, $tg(\frac{t}{2})$ не можливо побудувати з допомогою циркуля та лінійки.

Враховуючи умови:

$$\sin(t) = \frac{2tg(\frac{t}{2})}{1 + tg(\frac{t}{2})^2} \Leftrightarrow tg\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\frac{2}{\sin(t)} \pm \sqrt{\frac{4}{sin^2(t)} - 4}}{2}$$

$$cos(t) = \frac{1 - tg(\frac{t}{2})^2}{1 + tg(\frac{t}{2})^2} \Leftrightarrow tg\left(\frac{t}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(t)}{1 + \cos(t)}}$$

Розв'язання проблеми Ядренка (адаптований підхід)

Нехай маємо точки з координатами $A(0;0)$, $B(1;0)$, а коло ω відповідно має рівняння

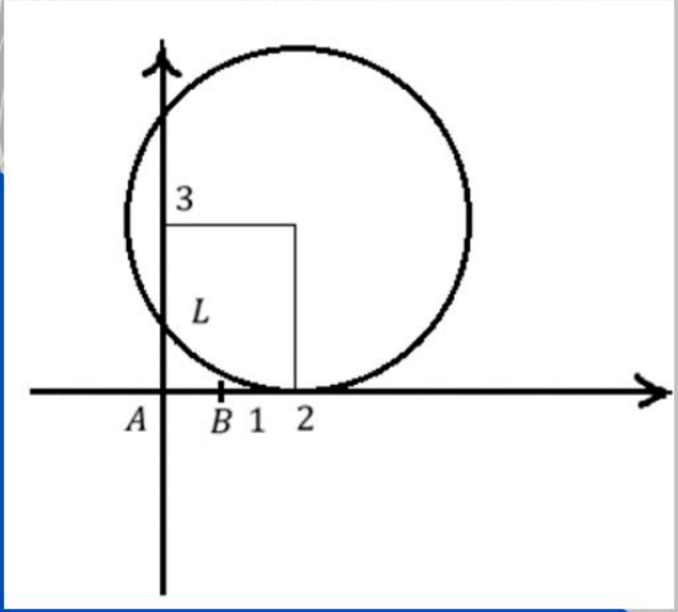
$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Візьмемо $a=2$ тоді $R=b=3$.

$$972x^6+6912x^5+16740x^4+15552x^3+756x^2-6912x-2916=0$$

Вище вказаний многочлен має нуль -1, причому кратністю три, тому при діленні лівої частини на $(x+1)^3$ отримаємо рівняння:

$$R(x)=9\,x^3+37x^2+17x-27=0$$



ВИСНОВКИ ТА РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

1. Проблема Ядренка завжди має розв'язок. Якщо відрізок AB перетинає коло ω в точках C та D, шуканими розв'язками проблеми Ядренка є точки C та D відповідно. Якщо відрізок AB не перетинає коло ω, то проблема Ядренка має єдиний розв'язок.

2. Проблема Ядренка в загальному випадку не може бути розв'язана за допомогою циркуля та лінійки, зокрема для випадку, коли A(-1;0),B(1;0),T(1;3) та радіус кола ω рівний 1, відповідна побудова не можлива.

3. Побудувати шукану точку для випадку, коли A(0;0),B(1;0),T(2;3) та радіус кола ω рівний 3 також неможливо.

Відео-фіксація обчислень в середовищі Maple

АПРОБАЦІЯ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

СЕРТИФІКАТ

виданий

Андрію Бондарю

який взяв участь у Всеукраїнській науково-практичній конференції

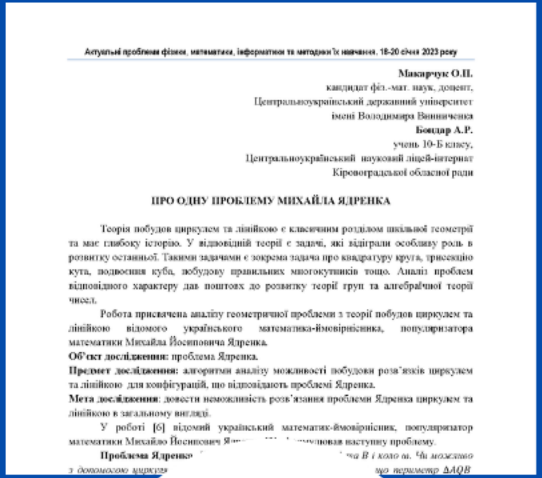
«Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання»,

присвяченій 90-річчю від дня народження кандидата фізико-математичних наук, професора Горбачука Івана Тихоновича

(0,2 кредити ЄКТС)

Голова програмного комітету Віктор Андрущенко

18-20 січня 2023 р., ФМІФ Київ, Україна



Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання, 18-20 січня 2023 року

Макарчук О.П.
кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Центральноукраїнський державний університет
імені Володимира Винниченка
Бондар А.Р.
учень 10-Б класу,
Центральноукраїнський науковий ліцей-інтернат
Кіровоградської обласної ради

ПРО ОДНУ ПРОБЛЕМУ МИХАЙЛА ЯДРЕНКА

Теорія побудов циркулем та лінійкою є класичним розділом шкільної геометрії та має глибоку історію. У відповідній теорії є задачі, які відіграли особливу роль в розвитку останньої. Такими задачами є зокрема задача про квадратуру круга, трисекцію кута, подвоєння куба, побудову правильних многокутників тощо. Аналіз проблем відповідного характеру дав поштовх до розвитку теорії груп та алгебраїчної теорії чисел.

Робота присвячена аналізу геометричної проблеми з теорії побудов циркулем та лінійкою відомого українського математика-ймовірнісника, популяризатора математики Михайла Йосиповича Ядренка.

Об'єкт дослідження: проблема Ядренка.

Предмет дослідження: алгоритми аналізу можливості побудови розв'язків циркулем та лінійкою для конфігурацій, що відповідають проблемі Ядренка.

Мета дослідження: довести неможливість розв'язання проблеми Ядренка циркулем та лінійкою в загальному вигляді.

У роботі [6] відомий український математик-ймовірнісник, популяризатор математики Михайло Йосипович ...

ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВО-ПРАКТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ

АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ ФІЗИКИ, МАТЕМАТИКИ, ІНФОРМАТИКИ ТА МЕТОДИКИ ЇХ НАВЧАННЯ

присвячена 90-річчю від дня народження кандидата фізико-математичних наук, професора Горбачука Івана Тихоновича

Збірник матеріалів конференції

18-20 січня 2023 року
м. Київ, Україна

результати дослідження були представлені наВсеукраїнській науково-практичній конференції «Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання»

ПРОБЛЕМА МИХАЙЛА ЯДРЕНКА З ТЕОРІЇ ПОБУДОВ ЦИРКУЛЕМ ТА ЛІНІЙКОЮ

Роботу виконав:
БОНДАР АНДРІЙ РУСЛАНОВИЧ,
учень 10 класу
комунального закладу
«Центральноукраїнський науковий ліцей-інтернат Кіровоградської обласної ради».

НАУКОВІ КЕРІВНИКИ:
МАКАРЧУК ОЛЕГ ПЕТРОВИЧ,
доцент кафедри математики та методики її навчання
Центральноукраїнського державного університету
імені Володимира Винниченка, кандидат фізико-математичних наук;

СВИРИДЕНКО ОЛЕНА ЛЕОНІДІВНА,
вчитель математики комунального закладу
«Центральноукраїнський науковий ліцей-інтернат Кіровоградської обласної ради».