Кіровоградська М.А.Н.

ПРО ОДНУ МЕТРИЧНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ЛАНЦЮГОВОГО ПРЕДСТАВЛЕННЯ З БІНАРНИМ АЛФАВІТОМ

ГРИГОРЬЄВА ДАР'Я ОЛЕКСАНДРІВНА,
учениця 11 класу
комунального закладу
«Центральноукраїнський науковий
ліцей-інтернат Кіровоградської обласної ради»

НАУКОВІ КЕРІВНИКИ:
Макарчук Олег Петрович,
доцент кафедри математики та цифрових технологій
Центральноукраїнського державного університету
імені Володимира Винниченка, кандидат фізико-математичних наук;

Свириденко Олена Леонідівна,
вчитель математики комунального закладу
«Центральноукраїнський науковий ліцей-інтернат
Кіровоградської обласної ради».

МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ:

довести існування граничної функції та оцінити асимптотику збіжності для послідовності функцій, що відповідають проблемі Гаусса по відношенню до ланцюгового представлення з алфавітом $\{\frac{1}{6};3\}$.

ОБ'ЄКТ ДОСЛІДЖЕННЯ:

метричні проблеми типу Гаусса.

ПРЕДМЕТ ДОСЛІДЖЕННЯ:

проблема Гаусса для ланцюгового представлення з алфавітом $\{\frac{1}{6};3\}$.

ЗАВДАННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ:

1) довести збіжність послідовності функцій, що відповідають проблемі Гаусса по відношенню до ланцюгового представлення з алфавітом $\{\frac{1}{6};3\}$.

2) побудувати оцінки асимптотики збіжності для послідовності функцій, що відповідають проблемі Гаусса по відношенню до ланцюгового представлення з алфавітом $\{\frac{1}{6};3\}$.

ПРАКТИЧНА ЦІННІСТЬ:

Робота має теоретичний характер, є вкладом в теорію функцій, математичний аналіз; відповідні результати можуть бути використані при викладанні спеціальних розділів математичного аналізу та алгебри.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ:

- структурний
- системний
- функціональний

Для класичного оператора $\mathrm{T}([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = [a_2, a_3, \dots, a_{n+1}, \dots]$ Гаусса заданого для ланцюгового представлення дійсних чисел проміжку $(0; 1]$ розглянемо послідовність функцій виду $h_n(x) = \lambda\left(T^{-n}\left((0;x]\right)\right)$ для кожного $x \in (0;1]$ де λ(·) – міра Лебега (в більш простому розумінні довжина). В листах 1800 та 1812 років до відомого французького математика П'єра-Симона Лапласа «король математики» Карл Гаусс стверджував, що довів рівність:

$$\lim_{n\to+\infty} h_n(x) = \log_2(x+1) = h(x)$$

для кожного x ∈ (0; 1], однак не знає на скільки швидко

$$r_n = \max_{[0;1]}|h_n(x) - h(x)|$$

прямує до нуля. Перші асимптотичні оцінки для r_n виду $O(\alpha^{\sqrt{n}})$ та $O(\beta^n)$ для деяких $\alpha, \beta \in (0;1)$ були отримані Родіоном Кузьміним та Полем Леві відповідно в 1928 та 1929 роках. Остаточна крапка в проблемі Гаусса була поставлена в 1974 році німецьким математиком Єдвардом Вірсінгом, який показав, що для деякої сталої γ ≈ 0,3037 границя

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{h_n(x) - h(x)}{(-\gamma)^{-n}}$$

представляє собою аналітичну функцію (дозволяє розклад Тейлора-Маклорена).

Добре відомо, що для кожного $t \in \left[\frac{1}{6};3\right]$ існує послідовність (b_n) кожен член якої рівний $\frac{1}{6}$ або 3 така, що $t = [b_1, \dots, b_n, \dots]$. Останнє зображення називається ланцюговим A_2-зображенням. Зчисленна множина чисел $t \in \left[\frac{1}{6};3\right]$(які ще називають A_2-бінарними) має два A_2-зображення виду $\left[b_1, \dots, b_n, \frac{1}{6}, \left(\frac{1}{6};3\right)\right] = \left[b_1, \dots, b_n, 3, \left(3;\frac{1}{6}\right)\right]$ де круглі дужки символізують період відповідної пари алфавіту. З іншого боку всі інші (їх називають A_2-унарними) числа відрізку $[\frac{1}{6}; 3]$ мають єдине A_2-зображення.

В роботі під функціями $g_n(x)$ ми розуміємо суму довжин відрізків виду $[a_1, a_2, \dots, a_n, t]$, $t \in \left[\frac{1}{6};x\right]$, $x \in \left[\frac{1}{6};3\right]$ по всім наборам $(a_1, a_2, \dots, a_n,)$ чисел кожне з яких рівне $\frac{1}{6}$ або 3. З іншого боку,

$$g_n(x) = \lambda\left(T^{-n}\left(\left[\frac{1}{6};x\right]\right)\right),$$

для кожного $x \in \left[\frac{1}{6};3\right]$

ОТРИМАНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1 для кожного $z \in [\frac{1}{6}; 3]$ виконується граничне співвідношення

$$\lim_{k\to+\infty} g_k(z) = \frac{17}{6\ln\frac{370}{81}}\left(\ln\frac{z+\frac{1}{3}}{z+6} - \ln\frac{3}{37}\right)$$

2 існує додатне число L таке, що для кожного $z \in [\frac{1}{6}; 3]$ та для кожного натурального k виконується умова $\left|g_k(z) - \frac{17}{6\ln\frac{370}{81}}\left(\ln\frac{z+\frac{1}{3}}{z+6} - \ln\frac{3}{37}\right)\right| \le L \cdot 0{,}9663^{\sqrt{k}}$

3 для кожного $z \in [\frac{1}{6}; 3]$ при $k \to +\infty$ є правильною рівність

$$\left|g_k(z) - \frac{17}{6\ln\frac{370}{81}}\left(\ln\frac{z+\frac{1}{3}}{z+6} - \ln\frac{3}{37}\right)\right| = O(0{,}9663^{\sqrt{k}})$$